MÉTHODOLOGIE VIII

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES ET COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES.

Dans cette fiche méthode, nous allons passer en revue les méthodes qui concernent les variables aléatoires discrètes et les couples de variables discrètes.

Exercice 1.- ***Préliminaires.***

Recopier et compléter l'ébauche de fiche méthode suivante

- **Formules des probabilités totales et applications.**

  Qu'est-ce qu'un système complet d'événements ?

  Énoncer les différentes versions de la formule des probabilités totales.

  Trouver dans le cours ou dans les exercices deux exemples d'application de ces formules.
- **Formule des probabilités composées et applications.**

  Énoncer la formule des probabilités composées.

  Trouver dans le cours ou dans les exercices un exemple d'application de cette formule.
- **Fonction de répartition et applications.**

  Rappeler la définition de la fonction de répartition.

  Soit X et Y deux lois discrètes. On s'intéresse aux lois $m = \min(X, Y)$ et $M = \max(X, Y)$. Alors m et M sont deux lois définies sur le même espace probabilisé que X et Y. Exprimer la loi de m et M en fonctions des fonctions de répartition de X et Y. Penser à cette technique chaque fois qu'on introduit le minimum ou le maximum de deux lois.
- **Formule de Bayes.**

  Énoncer la formule de Bayes.
- **Espérance, variance.**

  Rappeler la définition de l'espérance et de la variance. Quel est le rôle du théorème de transfert dans le calcul de la variance. Quelle(s) précaution faut-il prendre dans le cas où les variables sont infinies discrètes. Penser à citer le théorème de transfert et à prendre ces précautions dans une copie.
- **Lois usuelles.**

  Connaître absolument les lois usuelles (lois, espérance, variance, fonctions de répartitions, simulation, modélisation). Recopier ici le tableau du cours qui donne toutes ces informations.
- **Lois non usuelles.**

  Une question de concours classique consiste à définir une loi discrète par les valeurs de $P(X = k)$. Que faut-il vérifier pour montrer que ces valeurs définissent bien une loi de proba.
- **Couples de lois discrètes.**

  Qu'est-ce que la loi d'un couple de variables aléatoires. Exprimer cette loi de deux façons différentes, soit en faisant apparaître soit la probabilité d'une intersection, soit une probabilité conditionnelle. Dans quelles situations est-il préférable de choisir l'une ou l'autre des deux formulations ?

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

Trouver dans le cours ou dans les exercices deux exemples où on exprime la loi du couple, soit avec la probabilité d'une intersection, soit avec une probabilité conditionnelle.

- **Propriétés de stabilité par la somme.**

  Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Exprimer la loi de $X+Y$ dans le cas où

  1. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$.

  2. $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$.

  S'assurer de savoir refaire le calcul.

Exercice 2.- *Un exercice CLASSIQUE avec la formule de Bayes..*
Une entreprise fabrique des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Sur une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.

On suppose que A produit 60% des objets et B 40%. La probabilité qu'un objet produit par A soit défectueux est de 0.1 et par B, 0.2.

On choisit un objet au hasard à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Quelle est la probabilité que l'objet provienne de A ?

Exercice 3.- *Un exercice CLASSIQUE avec la formule des probabilités composées.*
On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et **sans remise** [1] 3 boules dans l'urne. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire.

Exercice 4.- *Un exercice un peu plus complet avec la formule des probabilités totales..*
Une pièce de monnaie est déséquilibrée de telle sorte que la probabilité d'obtenir Pile est égale à $\frac{1}{3}$. On effectue avec cette pièce une suite de lancers indépendants et on considère, pour tout $n \geqslant 2$, l'événement :

A_n : "la séquence Pile-Face apparaît pour la première fois au $n-1$ème et $n$ème lancers.

Pour tout $n \geqslant 2$, on note a_n la probabilité de l'événement A_n.

1. Calculer a_2, a_3 et a_4.

2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k}{3^n}.$$

Calculer a_n pour tout $n \geqslant 2$.

3. Calculer la probabilité pour que Pile-Face n'apparaisse jamais.

4. On considère alors la variable aléatoire X égale au nombre de nombre de lancers nécessaires pour qu'apparaisse pour la première fois la séquence Pile-Face. Déterminer la loi de X et son espérance.

5. **a.** Écrire un programme Python qui simule la variable X.

b. Comment obtenir numériquement une valeur approchée de $E(X)$?

6. **a.** Soit, pour tout $n \geqslant 2$, B_n l'événement

B_n : "la séquence Pile-Face apparaît pour la première fois au $n-1$ème et $n$ème lancers et il n'y a pas eu de séquence Face-Pile avant".

Pour tout n, on note b_n la probabilité de l'événement B_n. Calculer b_n pour tout $n \geqslant 2$.

b. En déduire la probabilité pour que la première séquence Pile-Face apparaisse avant la séquence Face-Pile.

1. Dans le cas d'un tirage sans remise, il faut **toujours** penser à la formule des probabilités composées.